CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández

APLICACIONES DE LAS MATRICES

El presente estudio se originó como respuesta a la ayuda que me pidió mi nieto mayor, de 17 años, mientras hacía su curso en un colegio de Brisbane, Australia, a la fecha de febrero de 2006. La verdad es que no sé cual sea la relación entre los currículos de aquí y de allí, pero todo apunta a que al muchacho le cogió desprevenido la tarea sobre la aplicación de matrices que le exigieron.

Por otra parte parece razonable que cada vez se introduzca antes a los estudiantes en estas cuestiones, ya que, aunque las matrices vienen de muy antiguo y tuvieron su esplendor en el siglo XIX, especialmente de la mano de los grandes matemáticos franceses, hoy en día su técnica es de especial aplicación a la informática y a la animación dentro de los medios audiovisuales.

Primero, algunas ideas básicas:

- Matriz es un cuadro de números o símbolos algebráicos ordenados en filas y columnas de manera que se corresponden entre sí.
- Se suele encerrar entre paréntesis o corchetes, nunca entre dos barras verticales. Esto último se reserva para los determinantes. Las matrices son una pura representación: no tienen valor; los determinantes, sí.
- La Matriz "m × n" tiene m Filas y n Columnas.
- a_{ij} es el elemento de una matriz situado en la fila i (una de las m que hay) y en la columna j (una de las n).
- La matriz vertical de dos filas y una columna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa al punto de coordenadas (x,y) en el plano.
- Producto de matrices. Sean las dos matrices $A = (a_{ij})\ m \times n$

  $B = (b_{ij})\ p \times q$

donde n = p, es decir, el número de columnas de la primera matriz A es igual al número de filas de la segunda matriz B. Esta exigencia obliga a un determinado orden de los factores: el producto de matrices no goza de la propiedad conmutativa. El producto A * B se define así:

El elemento que ocupará el lugar ij en la matriz producto es la suma de los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por el correspondiente de la columna j de la matriz B.

Como signo de multiplicación empleo indistintamente × ó *. Veamos un ejemplo en el que el punto (1,1) se transforma en el (3,2) mediante la aplicación de la matriz transformadora $[T]=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ multiplicada por la correspondiente al punto (1,1):

$$[T] * [B] = B'$$

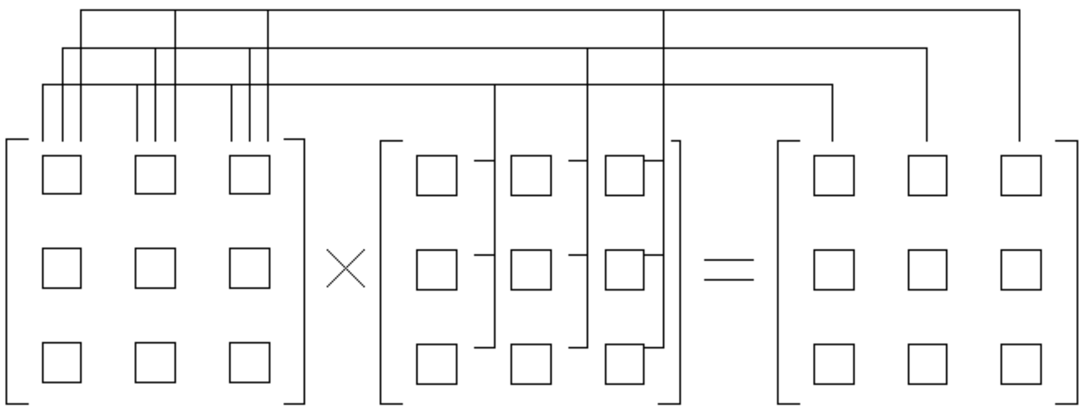
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 + 1\times 1 \\ 1\times 1 + 1\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por lo dicho antes, la abscisa se pone arriba y la ordenada abajo. Esta operación producto es muy útil para resolver sistemas de ecuaciones

A propósito del producto de dos matrices cuadradas, se muestra a continuación un ejemplo de ejecución y el esquema de generación de los elementos de la matriz producto. Se muestra el producto de una matriz por su inversa. Las matrices del ejemplo son 3 x 3 aunque las que venimos manejando son distintas.

$$-\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto obtenido es la matriz unidad ya que su determinante vale 1.



- Y ya que hablamos de matriz inversa será bueno detenernos en ella.

Por $[T^{-1}]$ se designa a la matriz inversa de [T], y se obtiene así:

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}\left[Adj[T]\right]^{Traspuesta}$$

Veamos qué quiere decir todo esto.

$|T|$ es el determinante de la matriz T y vale 2*1-1*1 = 1 (los productos en cruz, restados).

Adj[T] es la matriz adjunta de la matriz T. Se obtiene sustituyendo cada uno de sus elementos, por su adjunto. Adjunto de un elemento es su menor complementario, con el signo que le corresponde (alternados + y -). Como aquí sólo manejamos matrices y determinantes 2*2, la cosa resulta sencilla (los elementos se corresponden en diagonal).

Para la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$:

1ª fila: el adjunto de 2 es 1; el adjunto de 1 es -1.
2ª fila: el adjunto de 1 es -1; el adjunto de 1 es 2.

Así pues, Adj[T] será: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Ya sólo falta hallar la traspuesta de esta última matriz, cosa que consiste en cambiar las filas por columnas; ello nos conduce a una matriz igual a la que tenemos, como se comprueba fácilmente. Naturalmente, no ocurre así siempre.

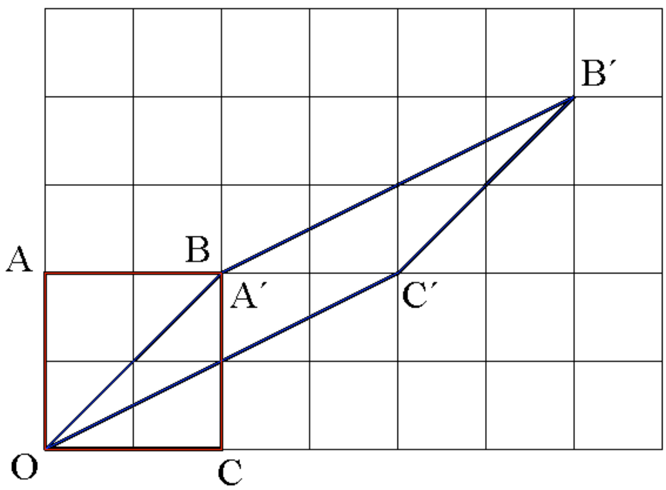
Por tanto, $T^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

TRANSFORMACIONES

Después de repasar estas ideas, estamos en condiciones de estudiar algunaas transformaciones en las que intervienen las matrices. Comenzaron éstas su andadura en 1850 y se han aplicado a multitud de campos: álgebra, geometría, cálculo, informática, física, etc. Recientemente han alcanzado un desarrollo sorprendente en aplicaciones de animación: en definitiva, transformación de figuras en espacios de dos y tres dimensiones.

POR EJEMPLO, el cuadrado OABC se puede transformar en el paralelogramo OA´B´C´ mediante la matriz transformadora T$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ que convierte los puntos del cuadrado en los del romboide.

T(B) = B´



Esa transformación se consigue multiplicando la matriz T por la matriz de las coordenadas del punto del cuadrado que queramos transformar. Las matrices a multiplicar hay que ponerlas en el orden exigido según se vio.

Las coordenadas de B son (1,1) [abscisa x = 1, ordenada y = 1]. Cada cuadradito tiene en este caso 0,5 de lado. El punto origen B se transforma en su imagen B´ (3,2), tal como se vio antes al tratar del producto de matrices.

Obsérvese que si cada cuadradito en vez de tener 0,5 de lado hubiera tenido 1, la misma transformación anterior nos mostraría que la imagen del centro del cuadrado es el centro del romboide (la intersección de sus diagonales).

Las coordenadas del centro del cuadrado, supuestamente E, son (0,5 ; 0,5), así que la matriz [E] que lo representa es $\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$. Para obtener la imagen E´ haremos como antes:

$$[T] * [E] = E'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 \\ 1 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0{,}5 \\ 0{,}5 + 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las coordenadas de E son x = 1,5 ; y = 1 que se corresponden con el punto medio de BC que es, a su vez, el centro del romboide.

Todos los puntos originarios del interior del cuadrado se pueden transformar en sus correspondientes imágenes en el interior del romboide.

RESOLVAMOS ahora el problema inverso, es decir, obtengamos el origen conociendo su imagen, y la matriz Transformadora T.

Ya que conocemos B y B´, hagamos la comprobación. Dado B´ obtendremos B así:

$$[T^{-1}] * [B'] = [B]$$

[B´] es conocida, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; B es la incógnita.

Por $[T^{-1}]$ se designa a la matriz inversa de [T], y se obtiene como ya se vio antes:

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}\left[Adj[T]\right]^{Traspuesta}$$

con resultado

$$T^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

De forma que será:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2 \\ -3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [B]$$

luego las coordenadas de B serán (1,1) como se puede comprobar.

Análogamente, se puede obtener el punto origen F dada su imagen F´(1,6;1,2) (ver los dos puntos azules en la figura):

$$[T^{-1}] * [F´] = [F]$$

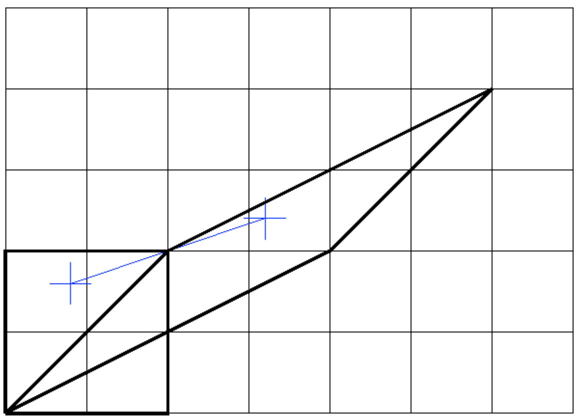
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1{,}6 \\ 1{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}6 - 1{,}2 \\ -1{,}6 + 2{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} = [F] \Rightarrow (x = 0{,}4; y = 0{,}8)$$

Escojamos ahora en el perímetro del cuadrado los puntos R(0,5;1) y S(1;0,5) y obtengamos sus transformados R´y S´.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 0{,}5 + 1 \times 1 \\ 1 \times 0{,}5 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} \Rightarrow (2;1{,}5)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 0{,}5 \\ 1 \times 1 + 1 \times 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} \Rightarrow (2{,}5;1{,}5)$$

Se puede observar que a R (punto medio del lado superior del cuadrado) le corresponde su imagen en el punto medio del lado superior del romboide. S (punto medio del lado derecho del cuadrado) tiene como imagen el punto medio del lado derecho del romboide. Obsérvese que estas dos imágenes tienen la misma ordenada y distan entre sí 0,5.



OBTENER la matriz imagen de de la recta $y = x \tan\theta$.

Fijemos esa recta dando un valor a θ. Para hacerlo sencillo hagamos θ = 45º a fin de que la línea sea y = x.

Para obtener la imagen de y = x tomaremos dos puntos de ella y averiguaremos la imagen de esos dos puntos: la recta que pase por ellos será la imagen de y = x.

La recta por (1,5; 1,5) y (2,5; 2,5) es la misma diagonal del cuadrado que pasa por el origen. Sus imágenes serán:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1{,}5 + 1 \times 1{,}5 \\ 1 \times 1{,}5 + 1 \times 1{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}5 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (4{,}5;3)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2{,}5 + 1 \times 2{,}5 \\ 1 \times 2{,}5 + 1 \times 2{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}5 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (7{,}5;5)$$

Fácilmente se puede comprobar en el dibujo que la recta que pasa por estos dos puntos imagen es la diagonal mayor del romboide. Además, su ecuación es:

$$\frac{5 - y}{7{,}5 - x} = \frac{y - 3}{x - 4{,}5}$$

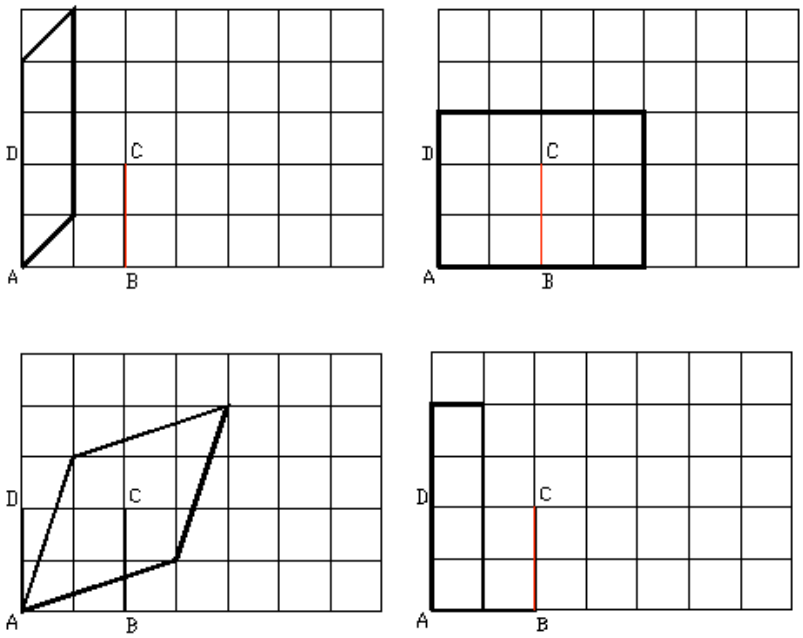
$$5x - 22{,}5 - xy + 4{,}5y = 7{,}5y - xy - 22{,}5 + 3x$$

$$5x + 4{,}5y = 7{,}5y + 3x$$

$$2x = 3y \qquad ; \qquad y = \frac{2}{3}x$$

Esta recta pasa por el origen (satisface a x = 0; y = 0) que es el vértice inferior del romboide, y por el superior (3,2): $2 = \frac{2}{3}3$. Es decir, la diagonal del cuadrado se transforma en la diagonal del romboide.

VAMOS A CREAR ahora otras cuatro matrices T1, T2, T3, T4 que asimismo puedan transformar cuadrados en paralelogramos, mostrando sus efectos en un papel cuadriculado.



Lo primero que observamos es que estos cuatro dibujos tienen una cosa en común con el primero de antes: El vértice A del cuadrado ABCD es un punto doble en la transformación, es decir, pertenece a ambas figuras, la origen y la imagen. Ello es exigencia derivada de la aplicación de la primera fórmula de transformación que usamos al principio: un factor 0 [punto (0,0) en vez de (1,1)], da producto 0. Esta circunstancia ocurre cuando un punto del objeto origen está situado en el origen de coordenadas.

En los cuatro casos disponemos de las coordenadas de los cuatro vértices origen y de los cuatro vértices imagen. Se nos pide que hallemos los cuatro elementos de la matriz transformadora: es decir tenemos cuatro incógnitas. Veamos cómo conseguir las relaciones necesarias para poder despejarlas.

Para mayor facilidad haremos que el cuadradito tenga de lado 1. Resolveremos sólo el caso del rombo. Se puede comprobar la sistemática con el romboide y los dos rectángulos. Las coordenadas serán, pues:

A(0,0)	A´(0,0)
B(2,0)	B´(3,1)
C(2,2)	C´(4,4)
D(0,2)	D´(1,3)

La matriz transformadora T contendrá las cuatro incógnitas: $\begin{bmatrix} v & y \\ x & z \end{bmatrix}$

Ahora ya podemos aplicar la fórmula de transformación:

$$\begin{bmatrix} v & y \\ x & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v \\ 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v = 1{,}5; x = 0{,}5$$

$$\begin{bmatrix} v & y \\ x & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v + 2y \\ 2x + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow v + y = 2; x + z = 2$$

Ya no necesitamos más relaciones:

v = 1,5 ; x = 0,5 ; y = 0,5 ; z = 1,5

$$\begin{bmatrix} v & y \\ x & z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz transformadora ya se puede ver la correspondencia de puntos objeto e imagen. El centro del cuadrado, por ejemplo, se corresponde con el centro del rombo:

$$\begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times 1 \\ 0{,}5 \times 1 + 1{,}5 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (2;2)$$

HALLEMOS AHORA el área de cada paralelogramo usando la función seno al menos una vez, y además cualquier otra forma matemática para los restantes.

ROMBO:

$$l = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$anguloagudo = ArcSen\frac{3}{\sqrt{10}} - ArcSen\frac{1}{\sqrt{10}} = 53{,}13^{\circ}$$

$$alturarombo = Sen 53{,}13 \times \sqrt{10} = 2{,}53$$

$$arearombo = 2{,}53 \times \sqrt{10} = 8$$

Sumando cuadraditos y sus porciones resultan 8 de ellos. Lo que queda es más fácil.

UNA RECTA se puede convertir en otra mediante una matriz transformadora de puntos, simplemente transformando dos puntos de ella. Supongamos que queremos transformar la recta origen $2x - y + 1 = 0$ mediante la matriz $T\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Bastará que tomemos de ella, por ejemplo, sus intersecciones con los ejes de coordenadas $(0;1)$ y $(-\frac{1}{2};0)$:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+2\\ 0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+0\\ -\frac{3}{2}+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

La recta que pasa por los puntos $1\equiv(2;4)$ y $2\equiv(\frac{1}{2};-\frac{3}{2})$ es:

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0 \quad \text{que resuelto da:}$$

$$x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-y_1x_2=0$$

la recta , en su forma general $Ax+By+C=0$ resultará ser:

$$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+(x_1y_2-y_1x_2)=0$$

y en su forma ordinaria $y=mx+h$:

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2-x_1}$$

A los mismos resultados se llega geométricamente observando los triángulos semejantes que determinan los puntos (x_1y_1) (x_2y_2) de la recta y un intermedio a ellos (xy):

$$\frac{y_2-y_1}{y-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x-x_1}$$

Sustituyendo valores:

$$A=\frac{11}{2} \qquad B=-\frac{3}{2} \qquad C=-5$$

es decir, la recta imagen será:

$$11x-3y-10=0$$

OBTENGAMOS ahora tres puntos de la recta $2x-y+1=0$

Tomemos sus abscisas como $x=0;x=1;x=2$; sus ordenadas serán, respectivamente, $y=1;y=3;y=5$. Los puntos serán, pues:

$$(0,1);(1,3);(2,5)$$

Aplicando la transformación $T\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ a cada uno de ellos, tenemos:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+2\\ 0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}\Rightarrow (2,4)*$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 3 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 15\end{bmatrix}\Rightarrow (5,15)*$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+10\\ 6+20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 26\end{bmatrix}\Rightarrow (8,26)*$$

Fácilmente se comprueba que los tres puntos * satisfacen a $3y'=11x'-10$

La generalización de lo anterior consistiría en demostrar que los tres puntos * están en línea recta. La condición para que tres puntos 1,2,3 estén alineados es que el determinante $\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$ sea igual a cero. Es decir, que en nuestro caso $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 5 & 15 & 1\\ 8 & 26 & 1\end{vmatrix}$ valga cero.

Hallemos el valor de Δ a partir de los elementos de su primera fila, y sus adjuntos:

$$\Delta = 2(15-26)-4(5-8)+(5\times 26-15\times 8)=0$$

como queríamos demostrar. Aquí te he dado una forma de generalización particular. El resultado no es casual: ocurrirá lo mismo con cualquier tripleta de puntos que se elijan en la primera recta. Cuéntame cómo establece tu profesor la generalización total.

VEAMOS AHORA cómo obtener directamente la ecuación de la recta imagen de otra origen dada, conociendo la matriz de transformación.

Sea $px+qy+1=0$ la recta origen, que es una generalización de la que venimos viendo $2x-y+1=0$, para $p=2;q=-1$.

Y sea $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ la matriz transformadora. En nuestro caso era $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

El producto transformador será:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{bmatrix}$$

Así pues, a un punto $(x;y)$ de la recta origen corresponderá el $(ax+by;cx+dy)$ de la recta imagen.

Dicha recta imagen tendrá $p';q'$ como coeficientes desconocidos, y ocurrirá, puesto que el punto imagen está en ella, que

$$p'(ax+by)+q'(cx+dy)+1=0$$

equivalente a

$$(p'a+q'c)x+(p'b+q'd)y+1=0$$

comparando esta última con la recta origen $px+qy+1=0$ deducimos:

$$\left.\begin{aligned} p &= p'a + q'c \\ q &= p'b + q'd \end{aligned}\right\}$$

asi tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (los coeficientes p´ y q´definidores de la recta imagen). Resolviéndolo, tenemos:

$$p' = (\frac{1}{b})(q - d\frac{pb - qa}{cb - da}) \qquad\qquad q' = \frac{pb - qa}{cb - da}$$

sustituyendo los valores que tenemos para a, b, c, d, p, q, se llega a:

$$p' = -\frac{11}{10} \qquad\qquad q' = \frac{3}{10}$$

que nos dan como recta imagen la conocida

$$-11x + 3y + 10 = 0$$

COORDENADAS del rombo OABC de fig. 1, sabiendo que $sen45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y que su lado mide 2 unidades.

$O \Rightarrow (0,0)$

$A \Rightarrow (2\cos 45, 2sen45) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$B \Rightarrow (2 + 2\cos 45, 2sen45) = (2 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$

$C \Rightarrow (2,0)$

GIRAR el rombo de Fig.1 90º en sentido de las agujas del reloj, para conseguir la Fig.2.

Gráficamente queda resuelto con la función giro de CAD.

Matricialmente, según $R_\theta = -\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

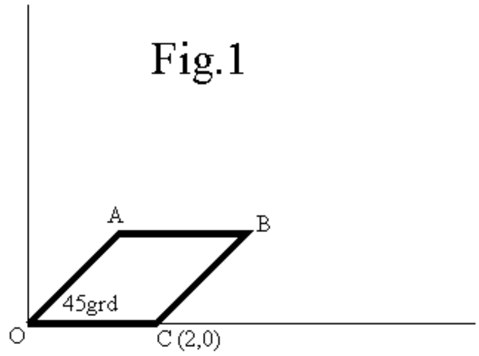
$O \Rightarrow O$

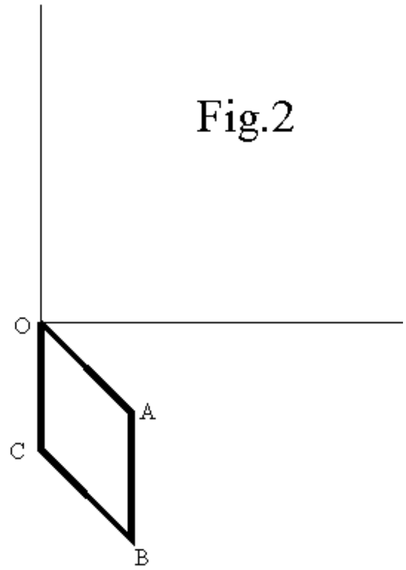
$$A \Rightarrow -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$B \Rightarrow -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2}+0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\sqrt{2}, -(2+\sqrt{2})]$$

$$C \Rightarrow -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,-2)$$

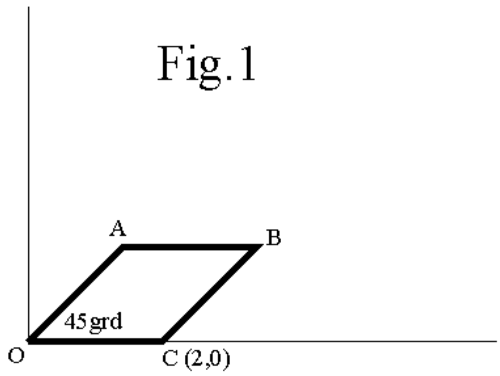
En la misma Fig.2 se pueden comprobar las cordenadas obtenidas matricialmente.

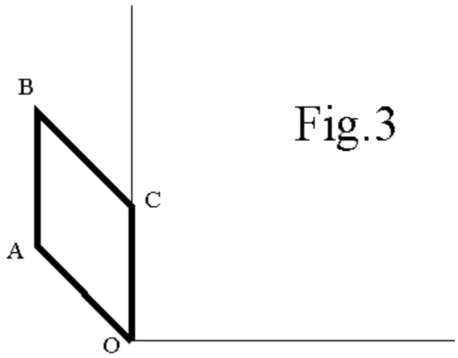




GIRAR ahora la Fig.1, 90º en sentido contrario a las agujas del reloj, para llegar a la Fig. 3.

Matricialmente: Esta transformación se diferencia de la anterior sólo en el sentido de giro, así que ahora la matriz R tendrá signo positivo. Ello conduce a que las coordenadas resultantes serán iguales a las de antes, cambiadas de signo, lo cual se aprecia comparando las Figs. 2 y 3.





APLICAR al rombo de la Fig.1 la transformación $T\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ver Fig.4):

$$O \Rightarrow (0,0)$$

$$A \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ \sqrt{2} + \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (3\sqrt{2};2\sqrt{2})$$

$$B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 + 3\sqrt{2} \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (4 + 3\sqrt{2};2 + 2\sqrt{2})$$

$$C \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (4;2)$$

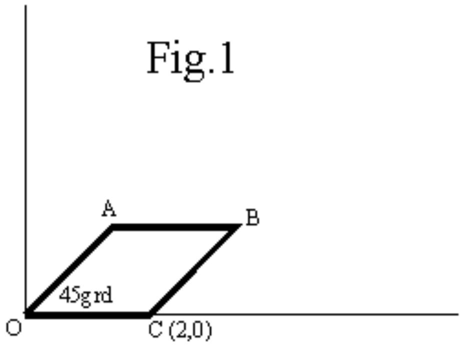


Fig.1

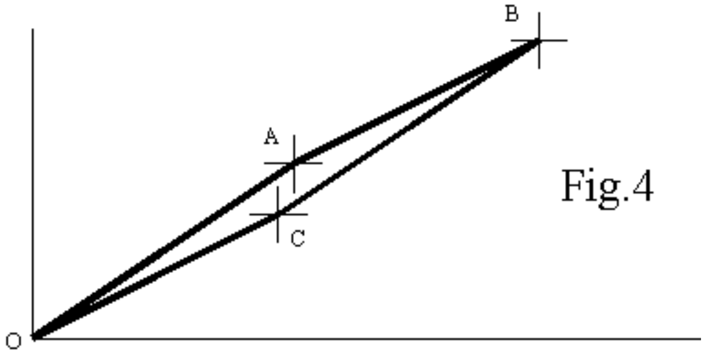


Fig.4

UNA VEZ OBTENIDA la Fig. 4, rotarla 90º en el sentido de las agujas del reloj. Primero lo haremos directamente en el gráfico (Figs 4 y 5).

Después lo haremos, sólo para el punto A, desde la Fig.4, como giro $R_{90} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y, desde la Fig.1, como producto de ese giro y la transformación $T\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

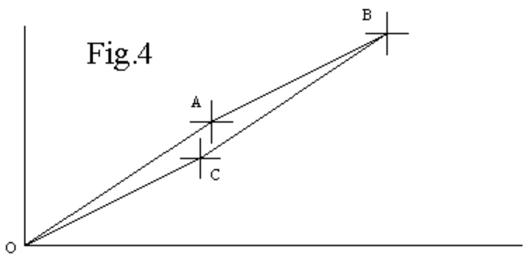


Fig.4

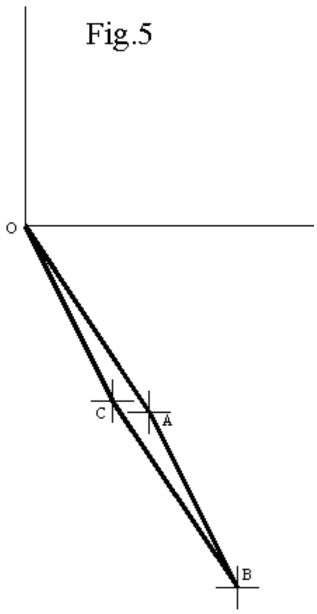


Fig.5

Desde Fig.4:

$$A \Rightarrow -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (2\sqrt{2};-3\sqrt{2})$$

DesdeFig.1:

$$A = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 & 0-1 \\ 2+0 & 1+0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\sqrt{2}-\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}+\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (2\sqrt{2};-3\sqrt{2})$$

UNA FIGURA sufre dos transformaciones sucesivas. Primero se refleja en la línea y = x, y a continuación lo hace según la transformación lineal $T = \begin{bmatrix} 4 & m \\ n & 1 \end{bmatrix}$, siendo *m* y *n* $\in R$ (es decir, parte del conjunto de los números reales, o sea, que pueden ser fraccionarios).

En estas condiciones la imagen final del punto origen A(3;4) es A´(-19;5), despues de haber pasado por A_1, el reflejado en la bisectriz del primer cuadrante.

Encontrar una transformación única que convierta A en A´.

Lo primero es ver que la imagen de A sobre aquella bisectriz es A_1 (4;3), cosa que resulta inmediata en cuanto se dibuje. Dibujar a escala los tres puntos.

Después hay que considerar que este A_1 se convierte en A´(-19;5) según $T = \begin{bmatrix} 4 & m \\ n & 1 \end{bmatrix}$. De la relación producto, se obtienen automáticamente m y n:

$$\begin{bmatrix} 4 & m \\ n & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esto nos conduce a las relaciones que permiten despejar m y n:

$$\left.\begin{array}{l} 16 + 3m = -19 \\ 4n + 3 = 5 \end{array}\right\}$$

$$m = \frac{-19-16}{3} = -\frac{35}{3}$$

$$n = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Es decir, $T = \begin{bmatrix} 4 & -\dfrac{35}{3} \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

La matriz transformadora de A a A_1 se obtiene mediante un tanteo muy elemental:

$$\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ resultando ser: } \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La transposición producto se planteará así:

$$\begin{bmatrix} 4 & -\frac{35}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} - \frac{35}{3} & 0 \\ \frac{4}{6} + 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 - 35 \\ 5 + 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (-19;5)$$

Luego la matriz producto buscada será: $\begin{bmatrix} \frac{16}{3} - \frac{35}{3} & 0 \\ \frac{4}{6} + 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}$

Al mismo resultado hubiéramos llegado mediante otro tanteo (diofántico en este caso):

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 3w + 4x = 4 \\ 3y + 4z = 3 \end{aligned}\right\}$$

resultando: $w = 0$; $x = 1$; $y = 1$; $z = 0$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -\frac{35}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{3} & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 + 16 \\ 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ 5 \end{bmatrix}$$