ESFERA A GAJOS

La esfera representada
no es una esfera cualquiera.
Está en marco encarcelada,
por no parecer lo que era,
esta esfera diseñada.

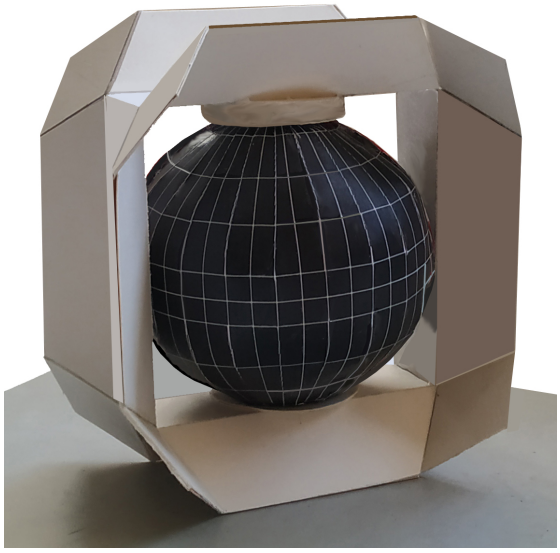

Fig. 1

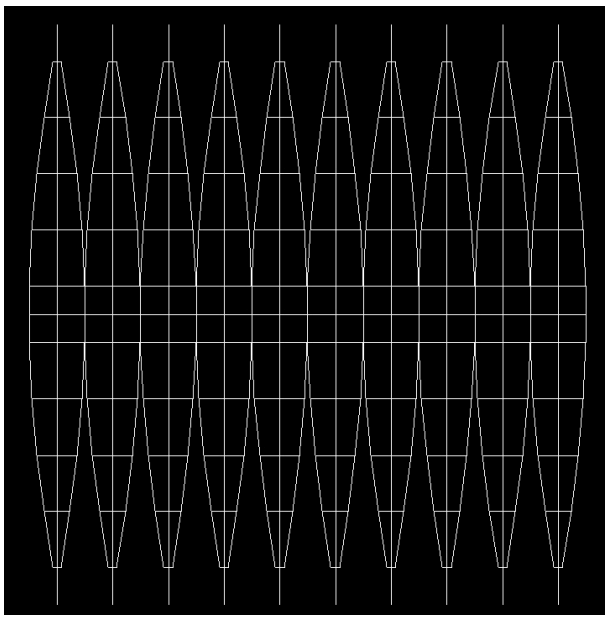

Fig. 2

Fig. 3

Continúo con mi afición esférica. Esta vez intenté darle la forma que se veía en algunos mapamundis antiguos: El de una esfera a gajos, como los de la naranja. La piel de ésta será la superficie esférica. Por cierto, el defecto *piel de naranja* en la pintura de las carrocerías de los coches que producíamos en fábrica era uno de los que más se vigilaban.

La quintilla se refiere a la esfera de la Fig.1 que está construida según el diseño de la Fig.2. que, a su vez, se parece mucho al de la Fig. 7. Mas adelante se verá en detalle este último diseño que es más racional. Obsérvese en dicha Fig. 2 que consta de 10 gajos que darán lugar a una de las dos semiesferas necesarias. El ecuador en centro horizontal y los polos arriba y abajo.

Ambos diseños (Figs. 2 y 7) están ejecutados con LIBRE CAD y copia en papel de impresora. Mi intención era que ese papel de Fig. 2, debidamente recortado y unido terminara cubriendo un esqueleto de cartón compuesto de gajos esféricos circulares según diedros de 18º.

Renuncié al esqueleto al ver que la *piel esférica* tomaba cuerpo por sí sola. Ciertamente lo tomaba, pero con serias dificultades (ver la Fig, 3). Realmente había dos problemas:
-Al emplear como pestañas los espacios inter-gajos de la Fig. 2 la figura se iba revirando evitando la esfericidad.
- Los polos resultaban impresentables e indeformables a causa de la acumulación de pegamento.

Llegué a estas tres conclusiones:

-Había que encarcelar la esfera para forzarla a la disciplina esférica evitando, de paso, que se viera lo impresentable.
-Como después del Big Bang no existía la esfera tal como la conocemos hoy, ello tenía que deberse a que la esfera original surgió con forma de caracola (Fig. 3) que, con el tiempo, y según Darwin, evolucionó hasta la esfera actual.
-Era preciso modificar el diseño y la construcción para producir la esfera en cartón.

Sobre la cárcel-marco de la Fig. 1 diré algo porque la cosa tiene su aquel: los ángulos del marco están resueltos con ocho rombos de a 60 por 120 grados (como de dos triángulos equiláteros cada uno).

DISEÑO A BASE DE PLAQUITAS DE CARTÓN.

La Fig. 4 representa el polígono de 20 lados de longitud a, que estaría inscrito en la circunferencia máxima de una esfera de R = 50 y centro O. En ella será:
$\alpha = 18^o$
sen $(\alpha / 2) = a / 2R$
$a = 2R \text{ sen } (\alpha / 2) = 100 \text{ sen}9 = 15{,}6434$
sen $\alpha = h1 / R$
$h1 = R \text{ sen } \alpha = 50 \text{ sen } 18 = 15{,}4508$

Los otros valores de h:
$h2 = R \text{ sen } 2\alpha - h1 = 50 \text{ sen } 36 - 15{,}4508 = 13{,}9385$

$h3 = R \text{ sen } 3\alpha - h1 - h2 = 50 \text{ sen } 54 - 15{,}4508 - 13{,}9385 =$
$= 11{,}0615$

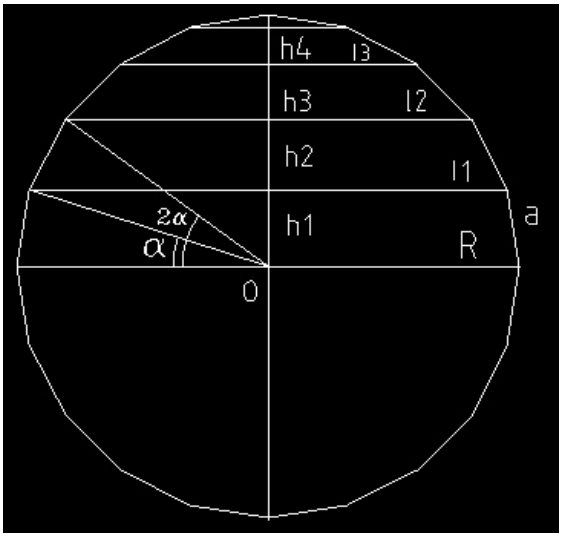

Fig. 4

$h4 = R \text{ sen } 4\alpha - h1 - h2 - h3 = 50 \text{ sen } 72 - 15{,}4508 - 13{,}9385 - 11{,}0615 = 7{,}1020$

Las semicuerdas *l* miden lo mismo que los lados iguales de sus respectivos triángulos isósceles con ángulo puntiagudo $\alpha = 18^o$, que es, asimismo el ángulo diedro del gajo (ver Figs. 5 y 6).

$l1 = \sqrt{(R^2 - h1^2)} = \sqrt{(50^2 - 15{,}4508^2)} = 47{,}5528$
$l2 = \sqrt{(R^2 - (h1 + h2)^2)} = \sqrt{(50^2 - (15{,}4508 + 13{,}9385)^2)} = 40{,}4508$
$l3 = \sqrt{(R^2 - (h1 + h2 + h3)^2)} = \sqrt{(50^2 - (15{,}4508 + 13{,}9385 + 11{,}0615)^2)} = 29{,}3893$
$l4 = \sqrt{(R^2 - (h1 + h2 + h3 + h4)^2)} = \sqrt{(50^2 - (15{,}4508 + 13{,}9385 + 11{,}0615 + 7{,}1020)^2)} = 15{,}4509$

En la Fig. 5 (proyección isométrica que no está a escala) se representa un trozo de gajo esférico (cuña esférica) sin curvatura ecuatorial. En el plano medio horizontal se ve un triángulo isósceles cuyo vértice picudo coincide con el centro de la esfera y cuyos lados iguales son el radio R = 50 de la esfera; el lado menor es *a*, el lado del polígono de 20 lados inscrito en la circunferencia máxima de la esfera. El ángulo menor de dicho triángulo isósceles mide, por tanto, 18 º.

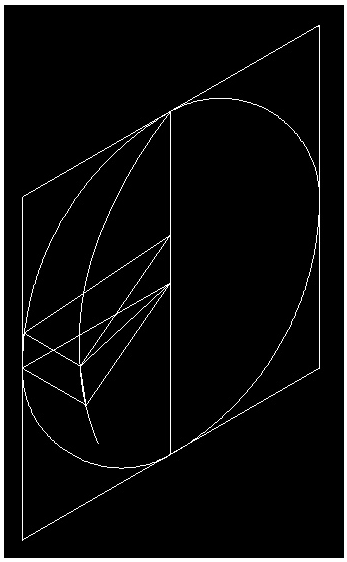

Fig. 5

La Fig. 6 es una extracción de la 5 que representa el primer prismoide que va a prestar su cara lateral menor para formar la piel de la esfera (una plaquita de cartón); está apoyado en el plano ecuatorial.

Que es un prismoide se ve al notar que su base inferior es mayor que la superior. Así pues, dicha cara menor es un trapecio cuya base menor a1 hemos de calcular: la base mayor y las laterales miden *a* (recordar que el dibujo no está a escala).

a1 = 2 l1 sen 9 = 2 × 47,5528 × 0,1564 = 14,8745
a2 = 2 l2 sen 9 = 2 × 40,4508 × 0,1564 = 12,6530
a3 = 2 l3 sen 9 = 2 × 29,3893 × 0,1564 = 9,1930
a4 = 2 l4 sen 9 = 2 × 15,4509 × 0,1564 = 4,8330

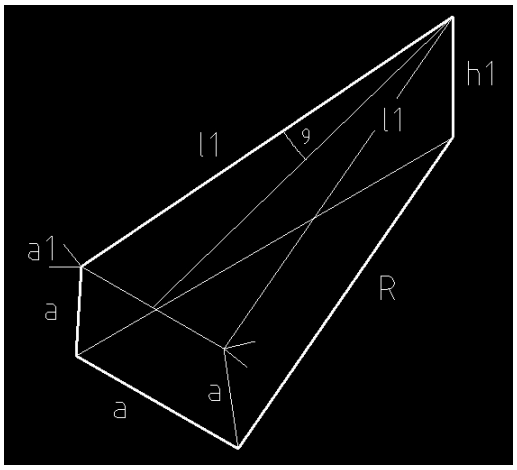

Fig. 6

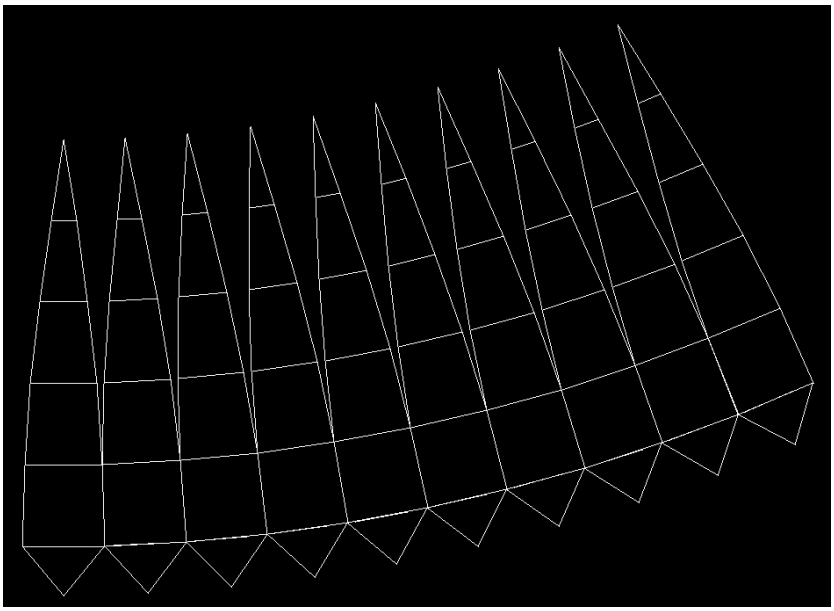

Fig. 7

La Fig. 7 es el desarrollo de la mitad de una semiesfera; por consiguiente, hacen falta cuatro como él para completar la esfera. Consta de 10 semigajos, cada uno de los cuales se compone, a su vez, de cuatro trapecios y un triángulo isósceles arriba.

Si nos fijamos en el semigajo de la izquierda, vemos que el trapecio inferior es el mismo de lados a, a, a, a1 de la Fig. 6. El que le sigue hacia arriba tiene a1 como base inferior siendo a2 la superior; sus lados laterales son iguales a *a*, y así sucesivamente. El triángulo isósceles de arriba tiene a4 de base y *a* como longitud de sus lados iguales.

Los 10 vértices superiores concurren en un polo; los 10 lados *a* inferiores forman un cuarto de ecuador. Obsérvese que no hay más pestañas que las triangulares asociadas al ecuador. Éstas se pegarán a una corona circular cuya periferia es el polígono de 20 lados de la Fig. 4. El resto de uniones de las plaquitas de cartón se pegarán *al canto*.

Ya sólo falta explicar cómo se consiguen dichas plaquitas. Como mi impresora no puede imprimir sobre cartón he recurrido a lo siguiente: Obtener una copia en papel de la Fig. 7; superponerla a un

cartón de tamaño adecuado; pinchar con la punta de la tijera cada nodo de la figura para dejar marca sobre el cartón; con regla y lápiz de punta fina, unir todas las huellas para conseguir sobre el cartón una figura igual a la de Fig. 7; repasar con regla y punta de tijera todos los segmentos *a* a fin de que las líneas de plegado resulten activas para constituir las plaquitas de cartón que han de quedar planas una vez formada la esfera.

El resultado que se obtiene es una *esfera poliédrica* como la de la Fig. 8 a la que puede aplicarse el teorema de Euler: caras + vértices = aristas + 2:

$$200 + 182 = 380 + 2$$

Fig. 8