SUPERFICIES MÍNIMAS
(sus esqueletos)

Simplificando mucho, ya que la cosa puede llegar a complicarse demasiado, se dice que una superficie finita es mínima cuando resulta la menor que puede quedar limitada por una curva cerrada.

Tomemos el caso de un aro circular: su círculo interno es una superficie mínima porque su área es menor que la de cualquier casquete esférico construible en esferas que contengan al aro como círculo menor o máximo. El círculo interno tiene, naturalmente, curvatura cero; cosa que no ocurre con los mencionados casquetes ni con otras superficies mínimas que luego se verán.

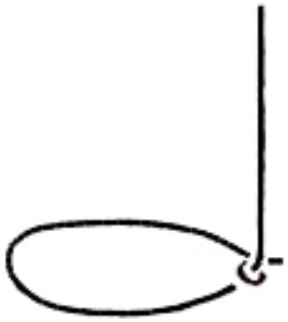


Fig. 1

Lo anterior se pone de manifiesto en la Fig. 1 que muestra un aro (con mango, para su mejor manejo) hecho con cable telefónico de diámetro exterior 1,5 mm. La curva cerrada es el aro (el mango no interviene), así que ha de conseguirse un nudo apretado que garantice el cierre.

Para comprobar que el aro llega a encerrar una superficie mínima, que será plana en este caso, haremos el siguiente experimento:

Verter en un frasco agua, un detergente líquido y glicerina líquida (se compra en farmacias), agitando el líquido jabonoso hasta que en reposo no aparezcan burbujas. El efecto de la glicerina es espesar algo la película formada para que la adherencia al aro se mantenga por más tiempo (que, en cualquier caso, es escaso).

Introducir el aro en el frasco hasta que quede cubierto por el líquido; extraerlo lentamente para comprobar que, una vez fuera, se mantiene en él una delgada película de líquido jabonoso que se mantiene adherida al arco en virtud de la tensión superficial del líquido. Es una lástima que no se pueda mostrar el resultado en una fotografía porque la película es transparente y brillante y queda poco fotogénica.

Otro caso es el de la Fig. 2 en la que se ven dos aros iguales situados paralelamente con sus centros sobre la misma vertical que llamaremos eje del conjunto.

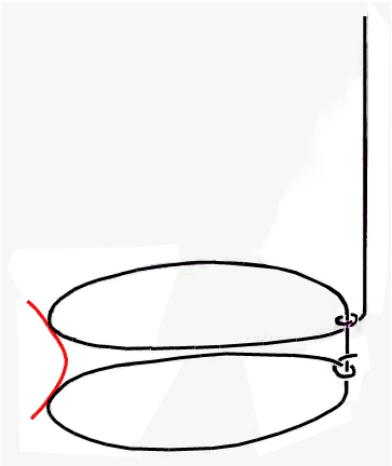


Fig. 2

Ambos aros son parte de una línea cerrada que partiendo del mango termina en el nudo del aro inferior. Se ha obviado el cerramiento material que consistiría en que estuvieran unidos la punta del mango con el fin del lazo inferior, ya que ese añadido formaría parte del mango sin afectar a los aros que son los activos en el experimento.

Si introducimos el conjunto en el líquido jabonoso como antes, después de la extracción, la película puede ofrecer dos configuraciones diferentes.

Según la primera, Fig. 3, hay dos troncos de cono simétricos cuyas bases mayores son los dos aros. La base menor es común y consiste en un círculo sobre el plano medio de los dos aros. La película

que se forma es la determinada por las superficies laterales de los dos troncos de cono unidas a las bases menores (comunes) de dichos troncos.

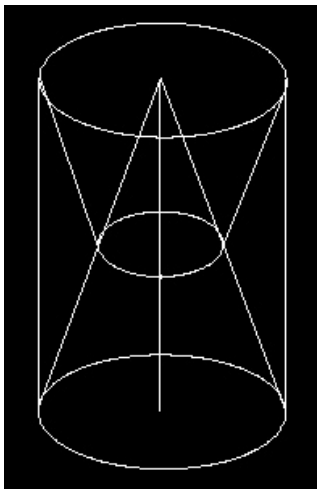


Fig. 3

Las películas de ambas figuras se parecen en que son superficies de revolución en torno al eje del conjunto, y en que son superficies mínimas. Las directrices en ambos casos son los aros. La generatriz de Fig. 2 es una curva (en rojo), mientras que en la Fig. 3, el conjunto de dos generatrices concurrentes de los troncos de cono, hacen de generatriz propiamente dicha.

Me apresuro a hacer una aclaración para evitar que alguien pueda ser víctima del trampantojo que me ha atacado a mí. Yo sabía que la película lateral que se forma en ambas figuras, 2 y 3, debe ser mínima, pero no se me cocía el bollo.

Mirando un triángulo obtusángulo de la Fig. 3 se constata que la suma de sus dos lados iguales es mayor que la generatriz del cilindro. *Ergo*, la suma de las dos superficies laterales de los troncos de cono también será mayor que el área lateral del cilindro: Una verdadera trampa para la vista que se desmonta mirando la Fig. 3. de otra manera. Es evidente que el área lateral de cada tronco de cono es menor que la mitad del área lateral del cilindro. Luego su suma será menor que el área lateral completa, del cilindro.

Algo parecido vale para la Fig. 2 en que la generatriz (en rojo) no es ni una línea quebrada, ni una cónica. Es una catenaria según demostró Euler (1744). De ahí que a la superficie que adopta la película líquida se la conozca como catenoide. Lo que no he sabido desentrañar es porqué la película adopta unas veces una configuración y otras, la otra.

Veamos un tercer caso de superficie mínima: la helicoide (Fig. 4), tornillo sin fin o de Arquímedes. Hay que recordar que todas las figuras aquí mostradas no son las de las superficies mínimas, sino las de sus esqueletos, es decir las de las líneas cerradas que las sustentan. Como se ve en dicha Fig. 4, la línea continua tiene su principio y su final de cierre en la parte superior, y está compuesta por una hélice y su eje. En la parte inferior se aprecia el paso continuo de éste a la hélice.

Fig. 4

Repito la lástima que supone no poder mostrar la belleza de la superficie brillante que se crea al introducir la pieza en el frasco del líquido jabonoso: la película obtenida se agarra, por un lado, a la hélice y, por otro, a su eje. Advertiré que el agarre puede durar alrededor de medio minuto.

Una cosa que ocurre, sorprendentemente, es que una helicoide se puede convertir en una catenoide, y viceversa, mediante un artificio virtual según se ve en este enlace: https://es.wikipedia.org/wiki/Catenoide .

Para terminar, y recordando lo que decía al principio sobre la complicación que puede asociarse a las superficies mínimas, voy a reproducir el esqueleto asentado en el plano del dibujo de las superficies mínimas del matemático alemán A. Enneper (finales del siglo XVIII). En la Fig. 5 se ve un punto negro sobre la curva continua desde el que se puede comprobar (al igual que desde cualquier otro) dicha continuidad de principio a fin, para producir su cierre.

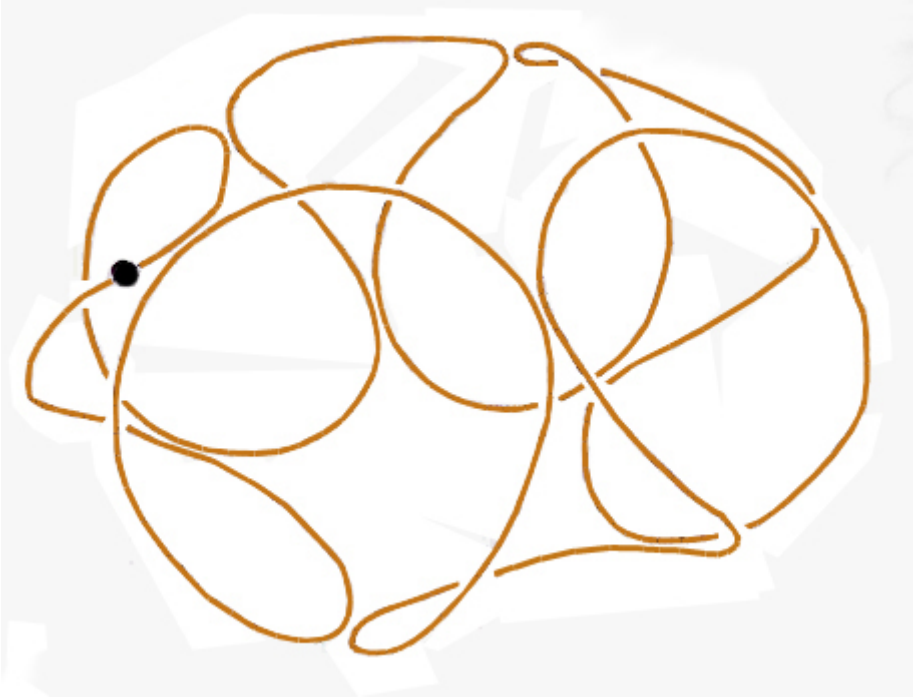
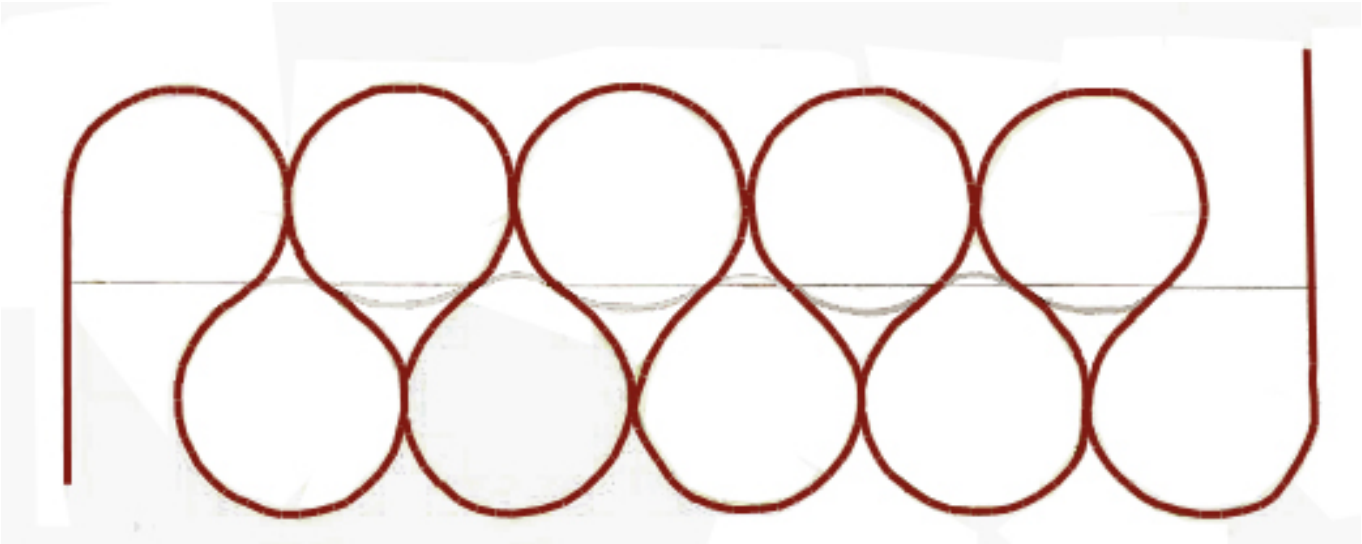


Fig. 5

Fig. 6



La Fig. 5 se obtiene a partir de la Fig. 6. Para pasar de ésta a la otra hay que hacer lo siguiente:

Amarrar los 8 puntos de tangencia rojos y pegar los nudos con cola blanca.

Anudar los dos cabos extremos del cable cerrando el conjunto a modo cilindro. Por último, deformar éste hasta conseguir una apariencia lo más esférica posible. En sus polos aparecerán sendos pentágonos curvos. Aquellos 8 puntos de tangencia se han convertido en 10. De los cabos de la Fig. 5 se obtendrá el mango necesario para introducir el conjunto en el frasco de líquido jabonoso.

Se puede ver que en la Fig.5 también existen los los 10 puntos de tangencia que no se tocan a fin de facilitar visualmente el seguimiento de la continuidad de la línea cerrada que forma el cable.

Hasta aquí hemos visto superficies mínimas muy bellas asociadas a una línea cerrada continua. Pero también hay superficies continuas y cerradas, asimismo de gran belleza: un ejemplo paradigmático de ellas son las cintas de Möbius que vemos en la Fig. 7.

Fig. 7

CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández

BIBLIOGRAFÍA

EL LIBRO DE LAS MΛTΣMΛTICΛS, de Clifford Pickover.